24/3/03

מערכות

• לאו פונקציה Y_n היא פונקציה של X_n. $Y_n = f(X_n)$

$x \to \square \to y$ $\qquad Y_n = f(X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots)$

• דיברנו על תכונות של מערכות (אינווריאנטיות לפי הזמן, הזזה בזמן, ליניאריות וכו').

• מערכת שהיא פילטר הינה אינווריאנטית לפי הזמן וליניארית.

דיברנו על הבעיות של זיהוי מערכת:

1. הבעיה הקלה - של זיהוי המערכת - מכניסים X לבחירתנו, ומקבלים y ומנתחים מה קורה.
2. הבעיה הקשה - כאשר אנו לא יכולים לשנות אלא רק להתבונן במערכת.

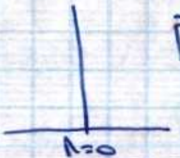
את הבעיה הזו כדאי לפתור רק כאשר המערכת היא מסנן, ואפילו כיוון שאחרת יכול להיות "חור שחור" שום דבר.

• דיברנו על שני שיטות כדי לפתור את הבעיה הקלה, כלומר איזה X-ים צריך להכניס ואילו y-ים צריך למדוד. גישה אחת היא של התגובה לתדר: $x = \sin(wt)$ ואז בודקים את התגובה של המסנן שכאשר מכניסים אות sin נכנס לתוך מסנן מקבלים אות sin באותו התדר עם אותו התדר (יכול להיות עם מקדמים שונים, מאופס, או מוזז בזמן אך יהיה עם אותו התדר).

ω	A	ϕ
1Hz	4	0
2Hz	1	$\pi/2$
⋮		

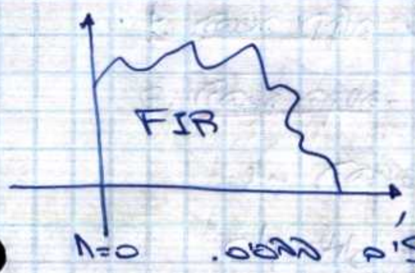
משום שהמערכת ליניארית (זה לפי זה) נעבור את כל התגובות שקיבלנו עם מקדמים כלשהם לכל אחד מהם, ולכן: $y=\sum_i A_i C_i \cdot \sin(w_i t+\phi_i\, \psi_i)$:
הבעיה שזה היה טבעי שזה יצטרך לא שימושי כי אינסוף תדרים.
ונדבר על שיטה אחרת - תגובה להלם.

נניח אות שהוא הלם/מתקף היחידה, הגלאי הוא אינו
חזק ולכן אף אחד לא מבטיח שהמוצא יהיה דומה לו. התגובה
הזו יהיה שונה מאוד.



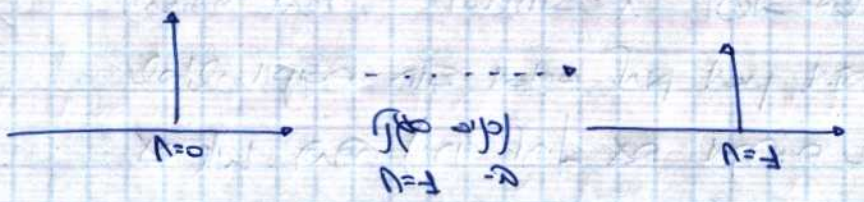
FIR לעומת IIR - ב-FIR הגל בסופו של דבר (נעלם). אם
אנו מכניסים הלם, בסופו של דבר לאחר זמן רב לא יהיה
לנו כלום במוצא. ב-IIR יהיה לנו תמיד משהו במוצא.

מסנן סיבתי - אם אינו יוצא לפני ההלם.
רב המסננים שלנו הן סיבתיים (קוזליים).



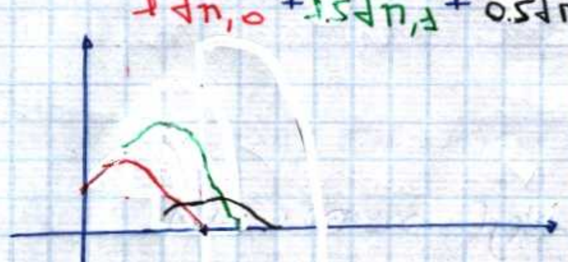
הגל והמימד אינסופי יהיה לנו אינסוף Signal'ים בבסיס. n=0

SUI - Shifted Unit Impulse - הם מתאימים
בסיס ולכן נוכל לקחת את הגל הקיים ולפרק אותו ל-SUI.
מכל הקבצה בזמן,
אנו יודעים את תגובת המערכת לכל הבסיס לכל משום שהוא פלט.



התגובה: הוא סכום של ההזזה הלם ולכן אם תגובה הליניארית
של המסנן נוכל לסכום אותם לקבלת הגל.

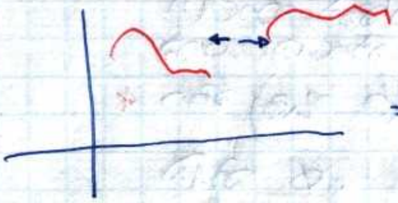
נראה בציור: $1\delta_{n,0} + 1.5\delta_{n,1} + 0.5\delta_{n,2}$



התגובה לתדר: קיבלנו 1 עם אינסוף תדרים.
התגובה להלם: פונקציה - איבר בסיס אחד עם אינסוף זמנים.
- אלו התגובה לתדר והתגובה להלם הן התמרה פוריה אחד של השני.

כעת ניגש לפתרון הבעיה הקשה:

הבעיה היא שיש מצב שבו לא לקחנו דגימה בתחום מסוים ולכן לא נוכל לפתור התעריך בתחום זה.



$\Rightarrow$ אין תגובה שיש תחום לא ידוע.

לדוגמא:

$$X \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow Y$$

x_0, x_1, x_2 | y_0, y_1, y_2

$$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$$

לצורך הפשטות נקח לזמן שהכל התחיל $n=0$.

נדבר על המקרה הפשוט, שהמסנן הוא FIR, כלומר אין כלום לפני $n=0$.

אם המערכת ה-I קל לפתור:

$$y_0 = a_0x_0 \Longrightarrow a_0 = y_0/x_0$$

$$y_1 = a_0x_1 + a_1x_0 \Longrightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0x_1}{x_0}$$

x_0 לא יכול להיות $\emptyset$ כיוון שהנחנו שמשם התחיל הכל הוא לא יהיה $\emptyset$!

- הכי חשוב אנו צריכים את ה-X-ים הקודמים אך לא את ה-Y-ים לכן יש צורך לשמור אותם. בזמן n מקומות אנו צריכים לשמור n-1 X-ים.

$$y_2 = a_0x_2 + a_1x_1 + a_2x_0 \Longrightarrow a_2 = \frac{y_2 - a_0x_2 - a_1x_1}{x_0}$$

- אם זה IIR יש לנו בעיה שזה ממשיך וממשיך עד אינסוף.

- מה קורה אם קיבלנו הדגימה למשהו היה רעש אך שינה מאוד - השגיאה שאנו רואים לא יכולה להתבטל.

- הנחה: נניח שיש שינוי בזמן של הפונקציה שכאן הדגימות שונים עקב האינווריאנטיות בזמן. יכול להיות שעבור נתונים קצת שונים כתוצאה מחוסר דיוק - כיצד נבחר את המקדמים הנכונים?

האם תחילת של הפתרון תהיה פתרון יציב? לא, נראה בהמשך פתרון טוב יותר שקשור למטריצות וקורלציה.

עד כה פתרנו בדרך הבאה:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 & \cdots \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0 \cdots \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

עשינו כאן הצגה מטריצית

המטריצה התחתונה והפכנו אותה.

הפיכת המטריצה הינה ב-$O(n)$.

כיצד נפתור זאת כאשר הסיגנל מגיע מ-∞ והאורך לא ידוע

דוגמא Ø. $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$

נניח שאנו יודעים מראש כמה מקדמים יש: (נניח שיש 3 מקדמים.

מה שנתון לנו:

$$\begin{matrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} \end{matrix}$$

יש לנו 3 נעלמים ולכן אנו צריכים 3 משוואות.

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_n & x_{n-1} \\ x_{n+2} & x_{n+1} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

לכן אנו צריכים גם את x_{n-1} ואת x_{n-2} שאלה לא אלו ה-Y-ים שלהם.

המטריצה של ה-X-ים שקיבלנו היא מטריצת Töplitz (כל האלכסונים שווים).

Töplitz - מתמטיקאי יהודי גרמני. אחד מאבות המתמטיקה האנליטית.

ברח מגרמניה לירושלים. היה פרופסור באוני' ונפטר לאחר שנה.

את רוב המטריצות אפשר להפוך ב-$O(n^3)$.

את המטריצה הנ"ל ניתן להפוך ב-$O(n^2)$

למשוואות והפתרון שאנו מקבלים קוראים Wiener-Hopf

עוד יתרון של מטריצת Töplitz הוא שקל להפוך אותן

בקלות יחסית הינה על היציבות הנומרית.

הפתרון הכללי: לוקחים n-רצף X-ים צמודים (input).
לוקחים n Y-ים " (output).

מתוך ה-X-ים בונים מטריצת Töplitz.

מקבלים משוואות Wiener-Hopf ופותרים אותן.

* נמשך מצב 2 משוואות IIR:

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_L X_{n-L}$$

נבחן את המבנה החישובי:

חישוב ע"י איטרציה

$Y_n \leftarrow 0$

loop(i) n times

$Y_n \leftarrow Y_n + a_i X_{n-i}$

איטרציה - $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

רקורסיה - $n! = n(n-1)!$

- במסנן רקורסיבי משתמשים גם ב-output הקודם.

* איטרטיבי (FIR) $Y_n = f(X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots) = *$

רקורסיבי (IIR) $Y_n = f(X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, Y_{n-1}, Y_{n-2}, Y_{n-3}, \ldots) = **$

$* \quad \sum_{l=0}^{L} a_l X_{n-l}$

צורת המסנן הכללי - $** \quad = \sum_{l=0}^{L} a_l X_{n-l} + \sum_{m=1}^{M} b_m Y_{n-m}$

* ה-FIR הוא מקרה פרטי של IIR כאשר כל ה-B-ים הם 0 וקוראים לו גם MA (Moving Average).

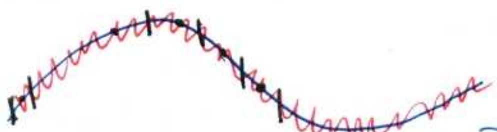
* משוואת של ה-MA

$$X_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\eta + V_n)$$

הרעש

התוחלת של הרעש שווה לאפס.

$\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot X_n$ --המוצא במקרה ש- η קבוע.



אנו עושים ממוצע למקטעים.

ה-Signal שלנו רץ מהר ולכן אנו צריכים הרבה דגימות. נשתמש בהגדרה בעקרון הלוקלי.

אנו עושים ממוצע ומציגים אותו - MA.

* קיים פילטר מאוד מפורסם ¼ ½ ¼ שמשמש באופן מאוד את המוצא שלו אני צריך לחבר למוצא. צריך כמו לא משנה את האורך שהיינו מקבלים בשימוש ב- ⅓ ⅓ ⅓ שבו לא היתה לנו הפרשה של המוצא. כל המקדמים צריכים להיות בסכום 1.

$\boxed{\text{MA מסנן FIR הוא מסנן}}$

* עוד מקרה פרטי הוא כאשר $a_0 \neq 0$, וכל שאר ה-a-ים שווים לאפס ורק ה-d-ים שונים מאפס.

לזה קוראים מסנן AR (Auto Rergressive). את זה הביא יול (מתמטיקאי שוודי). רצה לנבא את כתמי השמש. מאחר שלכתמי השמש יש הרבה השפעה על כדוה"א.

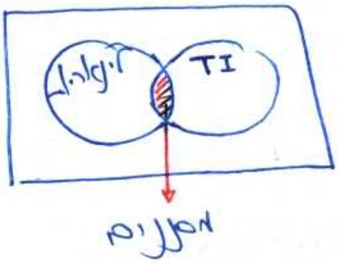
הוא בנה מערכת שהיא רקורסיבית בלבד. אין מקדמים כלל מאינדקסים input אחר.

* למערכת הכללית ביותר שהיא IIR קוראים ARMA.
AR הוא תמיד IIR (שהוא עם all polls).
MA הוא FIR (שהוא עם all zero).

3/3/03

תחום כל המערכות בעולם:

יש מערכות שהן ליניאריות, יש מערכות שהן קבועות בזמן (המסננים הם שניהם.



סוגי מסננים

F I R	I I R

FIR - ~~MA~~ סופי אותו - MA

IIR - אין סופיים: AR - רקורסיבים בלבד.

ARMA - כללים

$$MA \rightarrow Y_n = \sum_{\ell=0}^{L} a_\ell X_{n-\ell}$$

$$AR \rightarrow Y_n = a_0 X_n + \sum_{m=1}^{M} B_m Y_{n-m}$$

$$ARMA \rightarrow Y_n = \sum_{\ell=0}^{L} a_\ell X_{n-\ell} + \sum_{m=1}^{M} b_m Y_{n-m}$$

הבעיה הקשה: מה קורה כאשר אנו לא יודעים את המערכת בפנים ולא יודעים שהיא FIR.

מערכת FIR - MA

$$\boxed{FIR}$$

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2}$$

$$Y_{n+1} = a_0 X_{n+1} + a_1 X_n + a_2 X_{n-1}$$

$$Y_{n+2} = a_0 X_{n+2} + a_1 X_{n+1} + a_2 X_n$$

$$\begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n+1} \\ Y_{n+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_n & X_{n-1} & X_{n-2} \\ X_{n+1} & X_n & X_{n-1} \\ X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{pmatrix}}_{\text{Toplitz}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו (Töplitz) קל להפוך - $O(n^2)$ - $a = X^{-1} \cdot Y$

בשאלה H-W הן המשוואות למציאת המקדמים של FIR בבעיה הקשה. צריך n+1 input-ים (X-ים).

אך אנו יודעים כמה מקדמים יש בתוך המערכת.

נניח שיש הרבה מאוד מקדמים, נפתור ונמצא הרבה מאוד אפסים (או שקרובים מאוד ל-0).

מודל AR - IIR

$$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3}$$

- נניח כעת ש-a_0 שווה ל-1. לכן נזדקק רק ל-3 משוואות ולא 4:

$$y_n = x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + b_1 y_n + b_2 y_{n-1} + b_3 y_{n-2}$$

$$y_{n+2} = x_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n + b_3 y_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ y_{n+1} & y_n & y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Töplitz}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (Y)^{-1} \begin{pmatrix} y_n - x_n \\ y_{n+1} - x_{n+1} \\ y_{n+2} - x_{n+2} \end{pmatrix}$$

משוואות אלו קרויות Yule-Walker.

דוגמא:

$$y_n = x_n + \tfrac{1}{2} y_{n-1}$$
$$x_n = \delta_{n,0}$$
$$y_n = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2^{-n}, & n \ge 0 \end{cases}$$

אנו רואים שזהו זכרון אינסופי

$1 \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{4} \; .$

- ההבדלים בין משוואת Y-W לבין משוואת W-H הם שב-Y-W אנו משתמשים ב-output ואילו ב-W-H משתמשים ב-input-ים.
- מודל AR הוא מודל הפוך ל-MA ו-MA הוא מודל הפוך ל-AR (זה ההיפך).

אם קיים מודל הפוך.

מודל ARMA

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3}$$

אך נעלמים 6 משוואות:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_n & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{6 \times 3} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} y_{n-1} & \dots & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{6 \times 3} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- נכתוב את כל המשוואות בבת-אחת:

$$\begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n+1} \\ \vdots \\ Y_{n+5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_n & X_{n-1} & X_{n-2} & Y_{n-1} & Y_{n-2} & Y_{n-3} \\ X_{n+1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n+5} & X_{n+4} & X_{n+2} & Y_{n+4} & Y_{n+3} & Y_{n+2} \end{pmatrix}}_{6\times 6} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- הפעם אין לנו מטריצה Töplitz!

לכן להפוך את המטריצה יקח $O(n^3)$ וזה לא נורא.

ה-DSP "מתרגם" ל-ARMA.

כל כיוון של ה-DSP אפילו $O(n^3)$ הוא כמו כלום ...

על כיוון שה-DSP (המערכת) רק ב-Real Time.

- הפעולה אינה כזו ולכן נשתמש באוטוקורלציה של H-W או של W-Y.
- כאמור ה-DSP הוא מסנן מסוג זה או אחר.

ניתן גם לבנות הרבה פעולות בעזרת מסננים:

- גזירה היא פעולה לינארית ובלתי תלויה בזמן.
- אינטגרל " " " " " .

גם המרה הלאה ניתן לבנות בעזרת מסננים.

כושר את צורת פרק ממש: רק התדרים שהיו לפני המסנן

המסנן יהיו אותם התדרים מהמסנן.

- LPF - מעביר תדרים נמוכים ומנחית תדרים גבוהים. (lo-pass)
- HPF - לא מעביר תדרים נמוכים (מנחית את תדר ה-0 (DC)). (hi-pass)

דוגמה 1: $Y_n = X_n + X_{n-1}$

זהו LPF - רק התדרים הנמוכים עוברים.

דוגמה 2: $Y_n = X_n - X_{n-1}$

זהו HPF - רק התדרים הגבוהים עוברים

יש שני קיצוניים ניתן להבין לפי התדרים:

הנמוך - DC $1, 1, 1, 1, \ldots$

הגבוה - Nicuise $1, -1, 1, -1, \ldots$

BPF - מעביר תדרים אמצעיים. (band-pass)

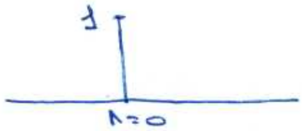
Band-stop - מעביר את כל התדרים פרט לאמצעיים

• יש מקרה פרטי של band-stop שקוראים לו <u>notch</u> והוא מעביר הכל חוץ לתדר אחד מאוד ספציפי.

אם נתון מסנן, כיצד נדע איזה סוג של מסנן הוא?

הכרת מסננים

• <u>מציאת התגובה להלם של המסנן.</u>



$X_n = \delta_{n,0}$

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2}$$

$\vdots$	$\vdots$	
$Y_{-100} = 0$	$Y_0 = a_0$	$Y_3 = 0$
$Y_{-99} = 0$	$Y_1 = a_1$	$Y_4 = 0$
$\vdots$	$Y_2 = a_2$	$\vdots$

סך הכל התגובה להלם היא a_0, a_1, a_2.

* אנו רואים שהאינדקסים הולכים בכיוון הפוך - קונבולוציה.
* כאשר שני האינדקסים " באותו הכיוון - קורלציה.
* ב- DSP ההלם בנקודה n_0 שווה ל- 1 ולא ל- ∞ כמו באנלוגי.
* התגובה להלם והתגובה לתדר יחד מספיקות כדי לתאר את אופי המסנן.
* <u>מציאת התגובה לתדר של המסנן</u>

מסנן לא סיבתי - $Y_n = \frac{1}{3}(X_{n-1} + X_n + X_{n+1})$

התגובה להלם היא: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

$$X_n = e^{i\omega n}$$

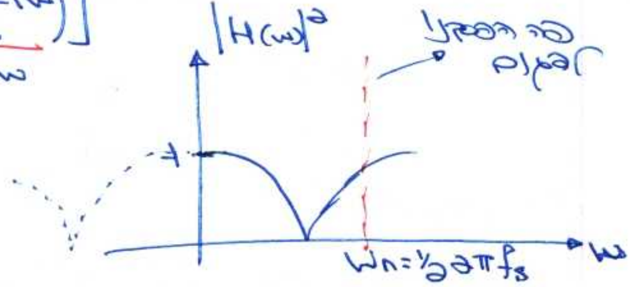
$$Y_n = \underbrace{H(\omega)}_{\text{התגובה לתדר}} e^{i\omega n}$$

נציב את התגובה לתדר ($H(\omega)$):

$$Y_n = \frac{1}{3}\left(e^{i\omega(n-1)} + e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{i\omega n}e^{-i\omega} + e^{i\omega n} + e^{i\omega n}e^{i\omega}\right)$$

$$= \underbrace{e^{i\omega n}}_{X_n} \cdot \left[\frac{1}{3}\left(1 + \underbrace{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}_{2\cos\omega}\right)\right]$$

$$Y_n = \underbrace{\frac{1 + 2\cos\omega}{3}}_{H(\omega)} \cdot X_n$$



אין שני מסננים כאלה שיש להם את אותה התגובה לתדר ולהלם. למסננים שונים <u>לעולם</u> לא תהיה אותה התגובה להלם ואותה התגובה לתדר.

אנו רואים שזהו LPF אך לא טוב במיוחד.

דוגמא כגון - $Y_n = \frac{1}{4} X_{n-1} + \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{4} X_{n+1}$

- כאשר אנו רוצים לגלות אם זהו FIR או IIR, יותר קל לזהות לפי המשוואה הזאת.
- לעומת זאת, אם רוצים לגלות אם זהו LPF או HPF וכו' נשתמש בתגובה לתדר.

תכנון מסנן

אם נותנים לנו תגובה לתדר ואנו רוצים למצוא את המקדמים.
רוב יאמרו לנו גם איזה מסנן זה - FIR או IIR.
יש מקומות באינטרנט שעושים כאלו.

קונבולוציה

$$Y = a * x$$

$$y_n = \sum a_l x_{n-l}$$

דומה לכפל - 2 סוגי מכפלה:

1. מכפלה רגילה:

$$\begin{array}{cccc}
A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\
\hline
 & A_2B_0 & A_1B_0 & A_0B_0 \\
A_2B_1 & A_1B_1 & A_0B_1 & \\
A_1B_2 & A_0B_2 & & \\
\vdots & & & \\
\hline
A_2B_0 + A_1B_1 + A_0B_2 & A_1B_0 + A_0B_1 & A_0B_0 &
\end{array}$$

$(A*B)_2$ $\quad$ $(A*B)_1$ $\quad$ $A*B$

2. מכפלת פולינומים:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

$$a(x)b(x) = a_0(b_0 + b_1 x + \dots) + a_1 x(b_0 + b_1 x + \dots) + \vdots$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (\dots)x^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0} (a*b)_i x^i$$

- קונבולוציה היא בעצם המכפלה הזו.
- השימוש כאן FFT - אלגוריתם להעברה בין ציר הזמן לציר התדר.
האלגוריתם FFT עובד בזמן של חסכון ולכן מהר יותר
מהכפלה של שני מספרים שלוקחת בערך $O(n^2)$.